التطبيقات Mappings

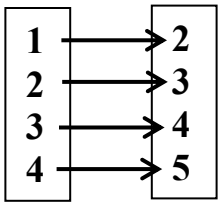
تأكد من فهمك:

س/ اكتب قاعدة اقتران للتطبيق ومثّله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى له:

1. $f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

الحل:

1. **قاعدة الاقتران (قاعدة التطبيق):** من الأزواج المعطاة نلاحظ أنّ: $1 \mapsto 2,\quad 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 5$
   يتضح أنّ كل صورة أكبر من عنصرها بـ **(1)**, إذن قاعدة الاقتران هي:
   $f(x) = x + 1$
2. **المجال(Domain) :** هو مجموعة العناصر (الأعداد الأولى في الأزواج):
   المجال $= \{1,2,3,4\}$
3. **المدى(Range) :** هو مجموعة الصور (الأعداد الثانية في الأزواج):
   المدى $= \{2,3,4,5\}$
4. **المخطط السهمي:** يمثّل التطبيق كالآتي:



****

2. $g = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$ **واجب** ⟵●

قاعدة الاقتران (قاعدة التطبيق)

1. **المجال (Domain)**

2. **المدى (Range)**

3. **المخطط السهمي**

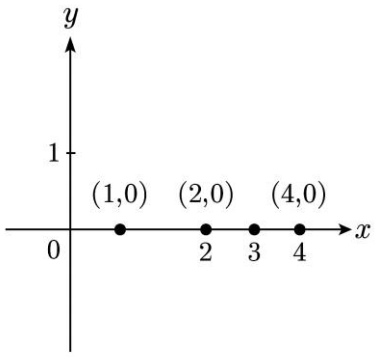
س/ اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثّلها في المستوي الإحداثي واكتب المجال والمدى لها:

3. $f = \{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)\}$

الحل:

1. **قاعدة الاقتران (قاعدة التطبيق):** من الأزواج المعطاة:
$$(1,0),\ (2,0),\ (3,0),\ (4,0)$$
نلاحظ أنّ **جميع الصور** $= 0$ مهما كانت قيمة المدخل, إذن قاعدة الاقتران هي:
$$f(x) = 0$$
2. **المجال (Domain) *:*** هو مجموعة القيم الأولى في الأزواج:
$$\text{المجال} = \{1,2,3,4\}$$
3. **المدى (Range) *:*** هو مجموعة القيم الناتجة:
$$\text{المدى} = \{0\}$$
4. **التمثيل في المستوى الإحداثي:** النقاط تكون على **المحور الأفقي *(X-axis)*** لأن الإحداثي $y = 0$ دائماً.
النقاط هي:
   - $(1, 0)$
   - $(2, 0)$
   - $(3, 0)$
   - $(4, 0)$

وتمثَّل على المستوى الإحداثي هكذا:



4. $g = \{(0,0),(1,-1),(2,-2),(3,-3)\}$

الحل: واجب بيتي

5. إذا كان التطبيق $f: N \to N$ إذ إنّ $f(x) = 3x + 2$. بيّن هل أن التطبيق شامل أم لا؟

الحل: في البداية يجب ايجاد المدى للتطبيق, أي نجد صورة 5 عناصر من مجموعة المجال على اقل تقدير:

$N = \{0,1,2,3,4, \dots\}$

$f(0) = 3(0) + 2 = \mathbf{2}$

$f(1) = 3(1) + 2 = 3 + 2 = \mathbf{5}$,

$f(2) = 3(2) + 2 = 6 + 2 = \mathbf{8}$,

$f(3) = 3(3) + 2 = 9 + 2 = \mathbf{11}$,

$f(4) = 3(4) + 2 = 12 + 2 = \mathbf{14}$

$$\text{المدى} = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\} \neq \{0,1,2,3,4, \dots\}$$

لكي يكون التطبيق **شامل** يجب ان يكون **المدى = المجال المقابل. لذلك فإن هذا التطبيق ليس شامل.**

6. ليكن التطبيقان $f: N \to N$ بحيث ان: $f(x) = 3x + 1$ وكان $g: N \to N$ بحيث ان: $g(x) = 2x + 5$. جد قيمة () إذا كان: $(fog)(x) = 28$

الحل:

(1) في البداية, نقوم بإيجاد التركيب $(fog)(x)$:

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f[g(x)] = f[2x + 5] \\ &= 3(2x + 5) + 1 \\ &= 6x + 15 + 1 \\ &= 6x + 16\end{aligned}$$

(2) ثم نقوم بحل المعادلة $(fog)(x) = 28$ لكي نجد قيمة x:

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= 28 \\ 6x + 16 &= 28 \\ 6x + 16 - 16 &= 28 - 16 \\ 6x &= 12 \\ x &= 2\end{aligned}$$

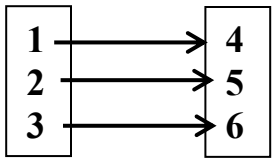
أو بالإمكان حلها هي نفس الوقت, كالتالي:

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= 28 \\ f[2x + 5] &= 28 \\ 3(2x + 5) + 1 &= 28 \quad \to\to\to \quad 3(2x + 5) + 1 - 1 = 28 - 1 \\ 6x + 15 &= 27 \\ 6x + 15 - 15 &= 27 - 15 \\ 6x &= 12 \\ x &= 2\end{aligned}$$

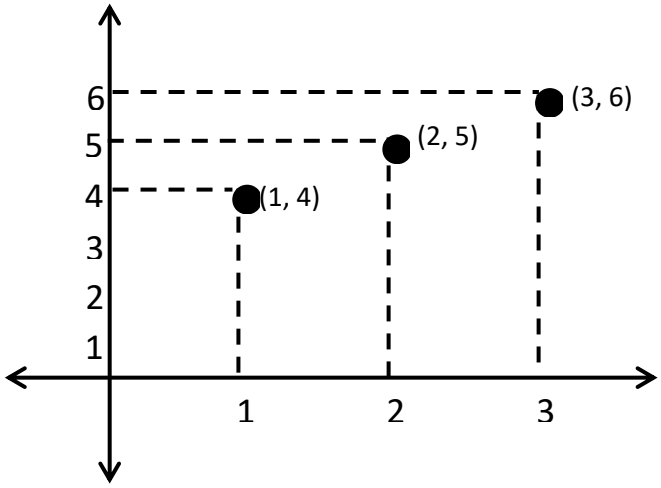
تدربْ وحلّ التمرينات:

7. إذا كان $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5,6\}$ وانّ $f: A \to B$ معرّف كالآتي:
$f = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}$, ارسم المخطط السهمي للتطبيق ومثِّله بالمستوي الإحداثي.

المخطط السهمي



المخطط البياني: التمثيل بالمستوي الاحداثي



8. اذا كان $f: A \to Z$ بحيث $f(x) = x^2$ و المجموعة $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ مثل التطبيق في المستوي الاحداثي و بين هل ان التطبيق متباين؟ ام لا؟

الحل:

$f(x) = x^2$

$f(-2) = (-2)^2 = -2 \times -2 = 4$

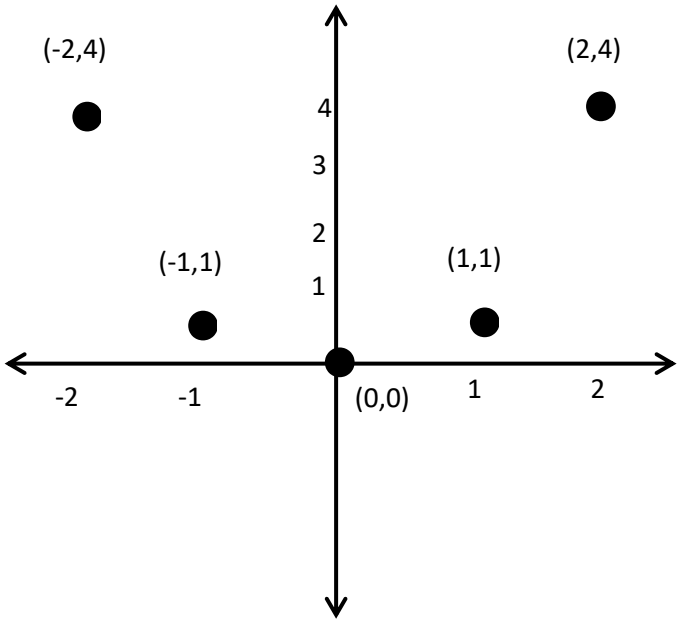
$f(-1) = (-1)^2 = -1 \times -1 = 1$

$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

المدى $= \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}\}$



$$\boldsymbol{f} = \{(-\mathbf{2}, \mathbf{4}), (-\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{2}, \mathbf{4})\}$$

9. اذا كان $f: N \to N$ بحيث $f(x) = x^2$ و اذا كان $G: N \to N$ بحيث بحيث $g(x) = x + 1$.
جد:

(1) $(\boldsymbol{fog})(\boldsymbol{x})$

(2) $(\boldsymbol{fog})(\mathbf{2})$

$(fog)(x) = f[\quad\quad] = (\quad\quad)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + 2x + 1$

$(fog)(2) = (2)^2 + 2(2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$

(3) $(\boldsymbol{gof})(\boldsymbol{x})$

(4) $(\boldsymbol{gof})(\mathbf{2})$

$(gof)(x) = g[\quad\quad] = \quad\quad +1$

$(gof)(2) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً:

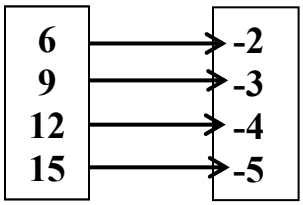
درجات الحرارة: سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية:

$$R = \{(6,-2),(9,-3),(12,-4),(15,-5)\}$$

إذ يمثل الإحداثي الأول الوقت بالساعة والإحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية. مثّل العلاقة بجدول ومثّلها بالمستوي الإحداثي، هل تمثّل العلاقة تطبيقاً أم لا؟ معللًا إجابتك.

الحل:

الإحداثي الأول **6,9,12,15** يمثل الوقت بالساعة و والإحداثي الثاني 2-, 3-, 4-, 5- يمثل درجة الحرارة بمعنى ان لكل ساعة توجد درجة حرارة خاصة بها (كل ساعة ترتبط بدرجة حرارة), فإذا عملنا مخطط سهمي للبيانات فإننا نحصل على:

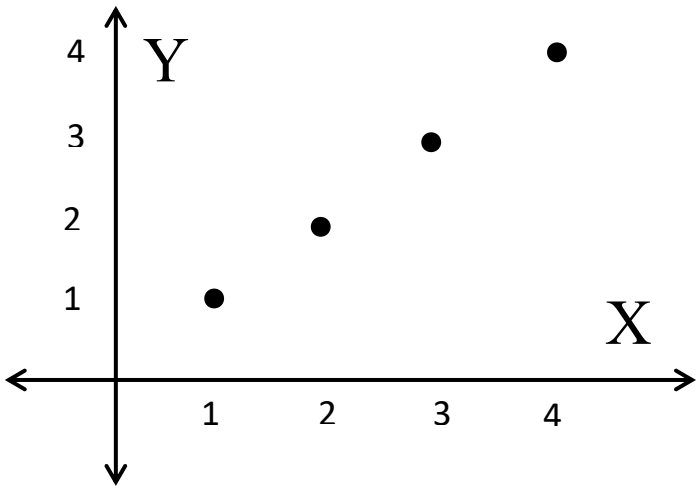


واضح ان العلاقة تمثل تطبيق.

التمثيل بالمستوي الاحداثي:

واجب

المستوي الإحداثي: الشكل البياني التالي يمثل التطبيق $f: N \to N$, اكتب إحداثيات الأزواج المرتبة التي تمثّلها نقاط التطبيق في البياني، اكتب قاعدة اقتران التطبيق، هل التطبيق متباين أم لا؟



صحة: العلاقة $W_r = 2(\frac{W_b}{3})$ تمثل وزنَ الماء في جسم الإنسان، و W_b تمثل وزنَ الإنسان. وزن حسان 150 kg ، استعملَ نظام خاص بإنقاص الوزن لمدة ثلاثة أشهر ففقَدَ من وزنه $6\ kg$ في الشهر الأول ثم 12kg في الشهر الثاني،12kg في الشهر الثالث. اكتب جميع الأزواج المرتبة للعلاقة بين وزن حسان ووزن الماء في جسمه، هل تمثل تطبيقاً أم لا

واجب.

سؤال مهم: اكتب قيمة x اذا كان $f: N \to N$ يمثل تطبيقا بحيث $f(x) = 4x - 3$ و إن:

$$(fof)(x) = 33$$

الحل:

$f(x) = 4x - 3$

$(fof)(x) = f[f(x)]$

$= 4(4x - 3) - 3$

$= 16x - 12 - 3$

$= 16x - 15$

$(fof)(x) = 33$

$16x - 15 = 33$

$16x = 33 + 15$

$16x = 48$

$\frac{16x}{16} = \frac{48}{16}$

$$x = 3$$

س/ حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريًا وبيانياً:

1. $14 \leq 3x + 7$ **و** $3x + 7 < 26$

الحل:

(1) جبرياً:

$14 \leq 3x + 7$ و $3x + 7 < 26$

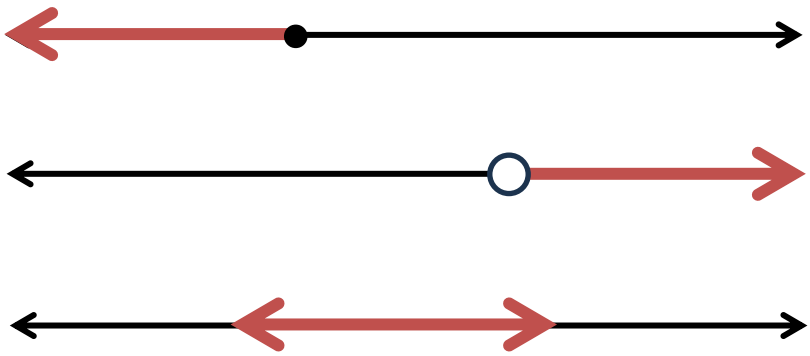
$14 - 7 \leq 3x + 7 - 7$ و $3x + 7 - 7 < 26 - 7$

$7 \leq 3x$ و $3x < 19$

$\frac{7}{3} \leq \frac{3x}{3}$ و $\frac{3x}{3} < \frac{19}{3}$

$\frac{7}{3} \leq x$ و $x < \frac{19}{3}$

(2) بيانياً:



****

2. $\frac{1}{25} < \frac{z+3}{5} < \frac{1}{15}$

الحل:

$$\frac{1}{25} < \frac{z+3}{5} < \frac{1}{15}$$

الخطوة 1: نتخلص من المقام 5 (نضرب جميع الأطراف في 5):

$$\frac{1}{25} \times 5 < \frac{z+3}{5} \times 5 < \frac{1}{15} \times 5$$

فتصبح المتباينة المركبة كالتالي:

$$\frac{1}{5} < z + 3 < \frac{1}{3}$$

الخطوة 2: نتخلص من 3+ (نطرح 3 من جميع الأطراف):

$$\frac{1}{5} - 3 < z + 3 - 3 < \frac{1}{3} - 3$$

$$\frac{1}{5} - 3 < z < \frac{1}{3} - 3$$

نحوّل 3 إلى كسر لسهولة الطرح:

$$\frac{1}{5}-\frac{15}{5}<z<\frac{1}{3}-\frac{9}{3}$$
$$\frac{1-15}{5}<z<\frac{1-9}{3}$$
$$\frac{-14}{5}<z<\frac{-8}{3}$$
$$S=\left\{z:\ \frac{-14}{5}<z<\frac{-8}{3}\right\}$$

بيانياً: واجب بيتي

س/ حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبريًا وبيانياً:

3. $z-2\leq -7$ أو $z-2>4$

الحل:

نتخلص من الحد المطلق (-2) بإضافة (+2) الى جميع أطراف المتباينة:

$$z-2+2\leq -7+2 \quad \text{أو} \quad z-2+2>4+2$$
$$z\leq -5 \quad \text{أو} \quad z>6$$
$$S=\{z: z\leq -5 \quad \text{أو} \quad z>6\}$$

4. $x-6\leq -1$ أو $x-6>4$

الحل:

$$x-6+6\leq -1+6 \quad \text{أو} \quad x-6+6>4+6$$
$$x\leq 5 \quad \text{أو} \quad x>10$$
$$S=\{x: x\leq 5 \quad \text{أو} \quad z>10\}$$

س/ اكتب المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا ضلعي المثلث معلومين:

5. (3cm, 10cm)

الحل:

أولاً: نفرض إن الضلع الثالث = x, فيصبح لدينا ثلاثة اضلاع و هي (x cm, 3cm, 10cm)
ثانيا: نطبق المتباينة المثلثية على الاضلاع ثم نحل كل متباينة على حدة:

$$x + 3 > 10 \quad \Rightarrow x + 3 - 3 > 10 - 3 \quad \Rightarrow\ x > 7$$
$$x + 10 > 3 \quad \Rightarrow x + 10 - 10 > 3 - 10 \quad \Rightarrow x > -7$$ تهمل
$$3 + 10 > x \quad \Rightarrow 13 > x \quad \Rightarrow x < 13$$

ثالثا: نرتب المتباينات التي حصلنا عليها و نستبعد المتباينة السالبة لنحصل على:

$$x > 7$$
$$x < 13$$

إذن طول الضلع الثالث يكون أطول من (7 cm) و أقصر من (13 cm) و لذلك ستكون المتباينة المركبة كالتالي:

$$7 < x < 13$$

6. (6cm, 4cm)

الحل:

نفرض إن الضلع الثالث = x:

$$x + 6 > 4 \quad \Rightarrow x > -2$$ يهمل
$$x + 4 > 6 \quad \Rightarrow x > 2$$
$$6 + 4 > x \quad \Rightarrow 10 > x \quad (x < 10)$$

ستكون المتباينة المركبة كالتالي:

$$2 < x < 10$$

أي إن طول الضلع الثالث يكون أطول من (2 cm) و أقصر من (10 cm)

7. (1cm, 3cm) واجب بيتي

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً:

صوت: أُذن الإنسان يمكن أن تسمع الأصوات التي لايقل ترددها عن 20 هرتزاً ولايزيد على 20000 هرتز. اكتب متباينة مركبة تمثل الترددات التي لاتسمعها أُذن الإنسان، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

الحل:

الأذن البشرية تسمع فقط الترددات بين:

$$20 \leq x \leq 20000$$

المطلوب : متباينة تمثل الترددات التي لا تسمعها الأذن البشرية,

أي كل ما هو أقل من 20 أو أكبر من 20000.

المتباينة المركبة للترددات التي لا تسمعها الأذن:

$$\boxed{x < 20 \quad \text{أو} \quad x > 20000}$$

إطار السيارات: ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لايقل عن (N/m^2) 28 Pascal ولايزيد على 36. Pascal اكتب متباينة مركبة تمثل الضغط، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد. (باسكال (pascal) هي وحدة قياس ضغط الهواء مقدرة (N/m2)).

الحل:

المعطى: الضغط المثالي لإطارات سيارات الصالون يكون بين:

$$28 \leq y \leq 36 \qquad (\text{بوحدة باسكال } \mathrm{N/m^2})$$

المتباينة المركبة هي:

$$\boxed{28 \leq y \leq 36}$$

تمثل جميع قيم الضغط المناسبة (من 28 إلى 36 باسكال مع شمول الطرفين).

****

القطار المغناطيسي: القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسية وباختصار يعرف بالماجليف (Maglev). وصُمِّمت أنواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم إذ إنّ سرعتها لاتقل عن 300 k/h ولاتزيد على 550 k/h . اكتب متباينة تمثّل سرعة القطار، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

الحل: واجب

تدرب و حل التمرينات:

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل الآتية:

1. يجب أن تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة 8° سيليزية بزيادة أو نقصان لايتجاوز 0.5° سيليزية. اكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة.

الحل:

المطلوب :مدى درجة الحرارة T المثالية داخل الثلاجة إذا كانت:

درجة الحرارة الأساسية $T = 8^\circ$ سيليزية ومسموح بزيادة أو نقصان لا يتجاوز 0.5° سيليزية.

نحسب الحدين الأدنى والأعلى:

الحدّ الأدنى:

$$8 - 0.5 = 7.5^\circ$$

الحدّ الأعلى:

$$8 + 0.5 = 8.5^\circ$$

المدى المثالي لدرجة الحرارة داخل الثلاجة:

$$\boxed{|T - 8| \leq 0.5^\circ}$$

****

2. درجة غليان الماء 100° سيليزية عند مستوى سطح البحر وتزداد وتنقص في المناطق الجبلية والوديان بما لايتجاوز 20° سيليزية. اكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء.

الحل:

$$\boxed{|T - 100| \leq 20}$$

واجب: كيف أصبحت المتباينة بهذه الصورة؟

3. حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

1. $|2z| - 5 < 2$

الحل:

نحل المتباينة خطوة بخطوة:

$|2z| - 5 < 2$

الخطوة 1: نتخلص من (-5) بإضافة (+5) إلى الطرفين:

$|2z| - 5 + 5 < 2 + 5$

$|2z| < 7$

الخطوة 2: نزيل القيمة المطلقة بتحويلها الى متباينة مركبة:

$-7 < 2z < 7$

الخطوة 3: نقسم على 2 لكي تبقى z لوحدها:

$-\frac{7}{2} < z < \frac{7}{2}$

الحل النهائي:

$$S = \left\{z: -\frac{7}{2} < z < \frac{7}{2}\right\}$$

2. $2|x| - 7 > 1$

الحل:

$2|x| - 7 > 1 \Rightarrow 2|x| - 7 + 7 > 1 + 7 \Rightarrow 2|x| > 8 \Rightarrow \frac{2|x|}{2} > \frac{8}{2} \Rightarrow |x| > 4$

بما إن علامة المتباينة هي (أكبر من), لذلك ستكون المتباية المركبة من نوع (أو):

$|x| > 4 \implies x > 4$ **أو** $x < -4$

****

3. $|\frac{4}{5}z| - 1 > \frac{4}{5}$ **واجب**

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً:

الغرير: حيوان الغرير هو أحد أنواع الثديات، ينتمي إلى شعبة الحبليات، ويمتلك قوائم قصيرة نوعاً ما، ويعيش في الحُفر التي يحفرها في الأرض، طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل من 68 cm الى 76 cm اكتب مدى طول الغرير.

الحل:

مدى طول جسم الغرير من الرأس الى الذيل يمثل متباينة مركبة كالتالي:

$$\boldsymbol{68 \leq x \leq 76}$$

و لكي نحول المتباينة المركبة الى متباينة بالقيمة المطلقة نقوم بايجاد العدد الذي يقع في المنتصف:

- المنتصف:

$$\frac{68+76}{2} = 72$$

- نصف المدى:

$$\frac{76-68}{2} = 4$$

إذن المتباينة بالقيمة المطلقة هي:

$$| x - 72 | \leq 4$$

صحة: معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح من 60 الى 90 نبضةً في الدقيقة. اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الإنسان.

الحل:

الدقات الطبيعية: $60 \leq x \leq 90$

الدقات غير الطبيعية: $x > 90$ أو $x < 60$

المتباينة:

$x < 60$ أو $x > 90$

متباينة بالقيمة المطلقة:

القيمة المطلقة تمثل القرب من مركز و المدى الطبيعي مركزه:

$$\frac{60+90}{2} = 75$$

والبعد المسموح به داخل الطبيعي:

$$\frac{90-60}{2} = 15$$

غير الطبيعي يعني:

$$\boldsymbol{| x - 75 | > 15}$$

مواصلات: تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح من **8 km** الى **10 km** إذ تعد منطقةً جويةً معتدلةً. اكتب مدى منطقة الطيران المدنية.

الحل:

المدى

$$8 \leq h \leq 10$$

نحول المتباينة المركبة الى متباينة بالقيمة المطلقة:

المنتصف:

$$\frac{8+10}{2} = 9$$

نصف المدى:

$$\frac{10-8}{2} = 1$$

القيمة المطلقة:

$$\boldsymbol{| h - 9 | \leq 1}$$

سؤال مهم: متباينة قيمة مطلقة تمثّل موقفاً من واقع الحياة، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

الحل:

سؤال من واقع طلاب الصف الثالث المتوسط:

(يريد أحد طلاب الصف الثالث المتوسط أن يحافظ على معدل دراسته اليومي قريبًا من 3 ساعات يوميًا، مع سماحية مقدارها نصف ساعة (0.5 ساعة) زيادة أو نقصان. اكتب متباينة بالقيمة المطلقة تمثّل عدد ساعات الدراسة المسموح بها، ثم مثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.)

الحل:

1. **كتابة المتباينة بالقيمة المطلقة:**

المعدل المثالي 3 = ساعات و السماحية 0.5 = ساعة, إذن ستكون المتباينة:

$$| x - 3 | \leq 0.5$$

2. **إيجاد المدى**

نفك المتباينة:

$$-0.5 \leq x - 3 \leq 0.5$$

نضيف 3 لجميع الأطراف للتخلص من 3- من المتباينة:

$$-0.5 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 0.5 + 3$$
$$2.5 \leq x \leq 3.5$$

إذن المدى المسموح لساعات المذاكرة هو:

من 2.5 ساعة إلى 3.5 ساعة يوميًا

3. **تمثيل الحل على مستقيم الأعداد:**

واجب